1.PHƯƠNG PHÁP LŨY THỪA

Bài toán 1. $\begin{cases}\sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=2 & (1)\\ \sqrt{x^2-y}+\sqrt{x^2+y}=4 & (2)\end{cases}$

Giải:

Điều kiện : $\begin{cases}x\ge y\ge 0\\ x\ge\sqrt{y}\end{cases}$. Nhận xét : Vế trái của phương trình (1) không âm.

Bình phương 2 vế từng phương trình ta được

$$\begin{cases}x-\sqrt{x^2-y}=2\\ x^2+\sqrt{x^4-y^2}=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2-y}=x-2 & (3)\\ \sqrt{x^4-y^2}=8-x^2 & (4)\end{cases}$$

Điều kiện : $0\le x\le 2\sqrt{2}$

Phương trình $(3)\Leftrightarrow x^2-y=4-4x+x^2\Leftrightarrow y=4x-4$

Phương trình $(4)\Leftrightarrow x^4-y^2=64-16x^2+x^4$

$$\Rightarrow x^4-(4x-4)^2=64-16x^2+x^4 \quad \Leftrightarrow 32x-80=0\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}\Rightarrow y=6$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $\left(\frac{5}{2};6\right)$

Bài toán 3. $\begin{cases}x-\sqrt{1+y}=\frac{5}{2} & (1)\\ y+2(x-3)\sqrt{x+1}=-\frac{3}{4} & (2)\end{cases}$

Giải:

Điều kiện : $\begin{cases}x\ge -1\\ y\ge -1\end{cases}$

Phương trình $(2) \Leftrightarrow 2x + 2\sqrt{x^2 - 4y^2} = 4$ $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4y^2} = 2 - x (3)$

Điều kiện tương đương : $x \le 2$. Phương trình $(3) \Leftrightarrow x^2 - 4y^2 = 4 - 4x + x^2$.

$\Leftrightarrow y^2 = x - 1 \Leftrightarrow x = y^2 + 1, x \ge 1 \quad (4)$

Thế (4) vào phương trình (3) ta được :

$(y^2+1)^3 + 2y^3 + (y^2+1)y(y^2 - y + 1) = 0$

$\Leftrightarrow y^6 + y^5 + 2y^4 + 4y^3 + 2y^2 + y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (y+1)^2(y^4 - y^3 + 3y^2 - y + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \Rightarrow x = 2 \\ y^4 - y^3 + 3y^2 - y + 1 = 0 \end{array}\right.$

Xét phương trình : $y^4 - y^3 + 3y^2 - y + 1 = 0 \quad (*)$

Nếu $y = 0 \Rightarrow x = 1$, không thỏa hệ.

Xét $y \ne 0$: phương trình $(*) \Leftrightarrow y^2 + \frac{1}{y^2} - \left(y + \frac{1}{y}\right) + 3 = 0$

Đặt $t = y + \frac{1}{y}, |t| \ge 2$. Phương trình trên trở thành : $t^2 - t + 1 = 0$, vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(-1;2)$

Bài toán 5. $\begin{cases} \sqrt{x+y} + x - y = 0 & (1) \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{3x+2y} = -1 & (2) \end{cases}$

Giải:

Điều kiện : $\begin{cases} x \ge -y \\ 3x + 2y \ge 0 \end{cases}$. Phương trình $(2) \Leftrightarrow \sqrt{x+y} + 1 = \sqrt{3x+2y}$.

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x+y} = 2x + y - 1 (3)$.Điều kiện : $2x + y \ge 1$.

Thế (3) vào phương trình (1) ta được :

$4x-y-1=0\Leftrightarrow y=4x-1(4)$

Thế (4) vào phương trình (3) ta được :

$2\sqrt{5x-1}=6x-2\quad\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{3}\\5x-1=9x^2-6x+1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{1}{3}\\9x^2-11x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{2}{9},loai\\x=1\Rightarrow y=3\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(1;3)$

Bài toán 6. $\begin{cases}x-\sqrt{1+y}=\dfrac{5}{2} & (1)\\y+2(x-3)\sqrt{x+1}=-\dfrac{3}{4} & (2)\end{cases}$

Giải:

Điều kiện : $\begin{cases}y\ge-1\\x\ge-1\end{cases}$. Phương trình $(1)\Leftrightarrow 2x-2\sqrt{1+y}=5$.

$\Leftrightarrow 2\sqrt{1+y}=2x-5\quad\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\dfrac{5}{2}\\4(y+1)=4x^2-20x+25(3)\end{cases}$

Phương trình $(2)\Leftrightarrow 4y+4+8(x-3)\sqrt{1+x}=1(4)$

Thế (3) vào phương trình (4) ta được :

$4x^2-20x+24+8(x-3)\sqrt{x+1}=0\quad\Leftrightarrow 4(x-3)(x-2)+8(x-3)\sqrt{x+1}=0$

$\Leftrightarrow 4(x-3)\left(x-2+2\sqrt{x+1}\right)=0\quad\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\Rightarrow y=-\dfrac{3}{4}\\2\sqrt{x+1}=2-x,loai\text{ vi x}\ge\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $\left(3;-\dfrac{3}{4}\right)$

Bài toán 50 . $\begin{cases} x^3 - y^3 = 9 \\ x^2 + 2y^2 = x - 4y \end{cases}$

Giải: Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 9 + y^3 & (1) \\ 3x^2 - 3x = -6y^2 - 12y & (2) \end{cases}$

Lấy phương trình (1) trừ phương trình (2) ta được :

$$x^3 - 3x^2 + 3x = y^3 + 6y^2 + 12y + 9 \Leftrightarrow (x-1)^3 = (y+2)^3$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = y + 2 \quad \Leftrightarrow y = x - 3 \quad (3)$$

Thế Phương trình (3) vào Phương trình (1) ta được

$$x^3 = 9 + (x-3)^3 \Leftrightarrow -9x^2 + 27x - 18 = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = -2 \\ x = 2 \Rightarrow y = -1 \end{array}\right.$$

Hệ phương trìnhcó 2 nghiệm $(1;-2),(2;-1)$

Bài toán 66. $\begin{cases} \left(x^2 + xy + y^2\right)\sqrt{x^2 + y^2} = 185 & (1) \\ \left(x^2 - xy + y^2\right)\sqrt{x^2 + y^2} = 65 & (2) \end{cases}$

Giải: Lấy phương trình (1) cộng với phương trình (2) ta được :

$$2\left(x^2 + y^2\right)\sqrt{x^2 + y^2} = 250 \quad \Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^3 = 125 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \quad (3)$$

Thế Phương trình (3) vào Phương trình (1) ta được

$5(25 + xy) = 185 \Leftrightarrow xy = 12$. Khi đó ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \\ xy = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{12}{x}\right)^2} = 5 \\ y = \dfrac{12}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \\ y = \dfrac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 = 16 \\ x^2 = 9 \end{array}\right. \\ y = \dfrac{12}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \Rightarrow y = 3 \\ x = 3 \Rightarrow y = 4 \\ x = -4 \Rightarrow y = -3 \\ x = -3 \Rightarrow y = -4 \end{array}\right.$$

Hệ phương trình có 4 nghiệm $(4;3),(3;4),(-3;-4),(-4;-3)$

Bài toán 67. $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}} + \sqrt{x-\sqrt{y}} = 2 & (1) \\ \sqrt{y+\sqrt{x}} - \sqrt{y-\sqrt{x}} = 1 & (2) \end{cases}$

Giải: Điều kiện : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \geq \sqrt{y} \\ y \geq \sqrt{x} \end{cases}$

Vì : $\sqrt{x} + \sqrt{x} \geq 0 \Leftrightarrow \left(y + \sqrt{x}\right) - \left(y - \sqrt{x}\right) \geq 0$

Suy ra, vế trái của (2) dương.Bình phương 2 vế 2 phương trình của hệ ta được :

$$\begin{cases} 2x + 2\sqrt{x^2 - y} = 4 \\ 2y + \sqrt{y^2 - x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - y} = 2 - x & (3) \\ 2\sqrt{y^2 - x} = 1 - 2y & (4) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - y = 4 - 4x + x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y + 4 = 4x \end{cases}$$

$$(4) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq \dfrac{1}{2} \\ 4\left(y^2 - x\right) = 1 - 4y + y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq \dfrac{1}{2} \\ 3y^2 - 4x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq \dfrac{1}{2} \\ 3y^2 + 3y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y \leq \dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{-3 \pm \sqrt{69}}{6} \end{cases}, loai$$

Hệ phương trìnhvô nghiệm

Bài toán 76. $\begin{cases} \sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=1 & (1) \\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=1 & (2) \end{cases}$

Giải:

Do phương trình(1) $\Rightarrow x+y>x-y \Leftrightarrow y>-y \Rightarrow y>0$

Điều kiện : $x\ge y>0$

Bình phương 2 vế từng phương trình ta được

$$\begin{cases} 2x+2\sqrt{x^2-y^2}=1 \\ 2x^2+2\sqrt{x^4-y^4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2-y^2}=1-2x \\ 2\sqrt{x^4-y^4}=1-2x^2 \quad (3) \end{cases}$$

Điều kiện : $0<x\le\frac{1}{2}$. Phương trình $(2)\Leftrightarrow 4\left(x^2-y^2\right)=1-4x+4x^2$

$$\Leftrightarrow 4y^2=4x-1 \Leftrightarrow y^2=\frac{4x-1}{4} \quad (4)$$

Thế (4) vào phương trình(3) ta được :

$$2\sqrt{x^4-\left(\frac{4x-1}{4}\right)^2}=1-2x^2$$

$$\Leftrightarrow 4\left(x^4-\frac{16x^2-8x+1}{16}\right)=1-4x^2+4x^4 \quad \Leftrightarrow 8x-5=0 \Leftrightarrow x=\frac{5}{8}$$

Suy ra $y^2=\frac{3}{8}\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $\left(\frac{5}{8};\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)$

Bài toán 82(THTT).. $\begin{cases} x^2\left(1+y^2\right)=2 & (1) \\ x^2y^2+xy=3x^2-1 & (2) \end{cases}$

Giải: Phương trình $(1)\Leftrightarrow x^2y^2=2-x(3)$

Thế (3) vào (phương trình(2) ta được :

$2-x^2+xy=3x^2-1 \Leftrightarrow 4x^2-xy-3=0$. Ta có x = 0, loại.

Xét $x \neq 0$: $y=\frac{4x^2-3}{x}$. Thế $y=\frac{4x^2-3}{x}$ vào (1) ta được :

$$x^2\left[1+\left(\frac{4x^2-3}{x}\right)^2\right]=2 \Leftrightarrow x^2+\left(4x^2-3\right)^2=2 \Leftrightarrow 16x^4-23x^2+7=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=1 \\ x^2=\frac{7}{16} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=1 \\ x=-1 \Rightarrow y=-1 \\ x=\frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow y=-\frac{5}{\sqrt{7}} \\ x=-\frac{\sqrt{7}}{4} \Rightarrow y=\frac{5}{\sqrt{7}} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm $(1;1),(-1;-1),\left(\frac{\sqrt{7}}{4};-\frac{5}{\sqrt{7}}\right),\left(-\frac{\sqrt{7}}{4};\frac{5}{\sqrt{7}}\right)$

Bài toán 83(THTT).. $\begin{cases} 2x^3-9y^3=(x-y)(2xy+3) & (1) \\ x^2 - xy + y^2 = 3 & (2) \end{cases}$

Giải: Thế phương trình(2) vàophương trình (1) ta được :

$$2x^3-9y^3=(x-y)\left(2xy+x^2-xy+y^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x^3-9y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)=x^3-y^3 \Leftrightarrow x^3=8y^3 \quad (3)$$

Ta có y = 0 thì x = 0, không thỏa (2), loại

Xét $y \neq 0$: phương trình$(3) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y}\right)^3=8 \Leftrightarrow \frac{x}{y}=2 \Leftrightarrow x=2y$.

Thế $x=2y$ vào phương trình(2) ta được :

$$(2y)^2-2y^2+y^2=3 \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=2 \\ y=-1 \Rightarrow x=-2 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(1;2),(-1;-2)$.

Bài toán 95. $\begin{cases} \sqrt{3}(x - y) = 2\sqrt{xy} & (1) \\ 2x - y^2 = 8 & (2) \end{cases}$

Giải: Điều kiện : $x \ge y \ge 0$

Bình phương 2 vế của phương trình (1) ta được :

$3(x-y)^2 = 4xy \Leftrightarrow 3x^2 - 10xy + 3y^2 = 0 \quad (3)$

TH 1 : $y = 0 \Rightarrow x = 0$: không thỏa hệphương trình.

TH 2 : $y \ne 0$: phương trình $(3) \Leftrightarrow 3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 10\frac{x}{y} + 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{y} = 3 \\ \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3y \\ y = 3x \end{array}\right.$

• $x = 3y$: phương trình $(2) \Leftrightarrow -y^2 + 6y - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 4 \Rightarrow x = 12 \\ y = 2 \Rightarrow x = 6 \end{array}\right.$

• $y = 3x$: phương trình $(2) \Leftrightarrow -9x^2 + 2x - 8 = 0$, vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(12;4),(6;2)$.

Bài toán 96. $\begin{cases} 2\left(\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}\right) = y & (1) \\ x^2 - y^2 = 9 & (2) \end{cases}$

Giải: Điều kiện : $x \ge \pm y$. Bình phương 2 vế củaphương trình (1) ta được :

$4\left(2x - 2\sqrt{x^2 - y^2}\right) = y^2 \; (3)$

Thế phương trình (2) vàophương trình (3) ta được : $8x - 24 = y^2 \quad (4)$.

Điều kiện : $x \geq 3$. Thế (4) vàophương trình (1) ta được :

$$4\left(2x-2\sqrt{x^2-8x+24}\right)=8x-24 \quad \Leftrightarrow x-\sqrt{x^2-8x+24}=x-3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-8x+24}=3 \Leftrightarrow x^2-8x+15=0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \Rightarrow y=\pm 4 \\ x=3 \Rightarrow y=0 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm : $(5;-4),(3;0),(5;4)$.

Bài toán 97. $\begin{cases} x+\sqrt{y^2-x^2}=12-y & (1) \\ x\sqrt{y^2-x^2}=12 & (2) \end{cases}$

Giải: Điều kiện : $y^2 \geq x^2$. Bình phương 2 vế của phương trình (1) ta được :

$$y^2+2x\sqrt{y^2-x^2}=144-24y+y^2 \quad \Leftrightarrow x\sqrt{y^2-x^2}=72-12y \quad (3)$$

Thế (3) vào phương trình (2) ta được : $12=72-12y \Leftrightarrow y=5$

Bình phương 2 vế của phương trình (2) ta được :

$$\Leftrightarrow x^2\left(y^2-x^2\right)=144 \Leftrightarrow x^2\left(25-x^2\right)=144 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=16 \\ x^2=9 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm 4; x=\pm 3$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm : $(3;5),(-3;5),(4;5),(-4;5)$.

Bài toán 98. $\begin{cases} x^2(y+1)(y+x+1)=3x^2-4x+1 & (1) \\ xy+x+1=x^2 & (2) \end{cases}$

Giải: Điều kiện : $xy+x+1 \geq 0$

TH 1 : $x=0$: không thỏaphương trình (2).

TH 2 : $x \neq 0$: phương trình $(2) \Leftrightarrow y+1=\dfrac{x^2-1}{x} \quad (3)$

Thế (3) vào phương trình (2) ta được :

$$x^2\left(\frac{x^2-1}{x}\right)\left(x+\frac{x^2-1}{x}\right)=3x^2-4x+1 \quad \Leftrightarrow \left(x^2-1\right)\left(2x^2-1\right)=3x^2-4x+1$$

$$\Leftrightarrow x\left(2x^3-6x+4\right)=0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=-1 \\ x=-2 \Rightarrow y=-\frac{5}{2} \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm $(1;-1),\left(-2;-\frac{5}{2}\right)$.

Bài toán 99. $\begin{cases} x+\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}=3 \\ y-\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=0 \end{cases}$

Giải: Điều kiện : $x^2+y^2 \neq 0$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x\left(x^2+y^2\right)+3x-y=3\left(x^2+y^2\right) & (1) \\ y\left(x^2+y^2\right)-x-3y=0 & (2) \end{cases}$

Xét $x=0$:hệ phương trình trở thành :

$\begin{cases} 3y^2+y=0 \\ y^3-3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow y=0$, loại.

Xét $y=0$:hệ tphương trình rở thành :

$\begin{cases} x^3+3x-3x^2=0 \\ -x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$, loại

Xét $x, y \neq 0$: Hệ phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy\left(x^2+y^2\right)+3xy-y^2=3y\left(x^2+y^2\right) & (3) \\ xy\left(x^2+y^2\right)-x^2-3xy=0 & (4) \end{cases}$$

Cộngphương trình (3) và phương trình (4) lại với nhau ta được :

$$2xy\left(x^2+y^2\right)-y^2-x^2=3y\left(x^2+y^2\right)$$

$\Leftrightarrow (2xy-3y-1)(x^2+y^2)=0 \quad \Leftrightarrow 2xy-3y-1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3y+1}{2y} \quad (5)$

Thế (5) vào phương trình (2) ta được :

$\Leftrightarrow y\left[\left(\dfrac{3y+1}{2y}\right)^2+y^2\right]-\dfrac{3y+1}{2y}-3y=0$

$\Leftrightarrow 4y^3+9y^2+6y+1-2(3y+1)-12y^2=0$

$\Leftrightarrow 4y^3-3y^2-1=0 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=1$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(1;1)$.

Bài toán 104(HSGHCM 2013-2014).

$$\begin{cases} 16x^2+4xy+y^2=12 & (1) \\ 8x^2+4xy-28x-5y=-18 & (2) \end{cases}$$

Giải: Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 16x^2+4xy+y^2=12 & (1) \\ 16x^2+8xy-56x-10y=-36 & (2) \end{cases}$$

Cộng phương trình (1) và phương trình (2) lại với nhau ta được :

$32x^2+2(6y-28)x+y^2-10y+24=0$

Xem x là ẩn của phương trình, y là tham số.

$\Delta=(2y-4)^2$. Phương trình có nghiệm : $\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{6-y}{4} \\ x=\dfrac{4-y}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=6-4x \\ y=4-4x \end{array}\right.$

• $y=6-4x$: Phương trình $(1) \Leftrightarrow 16x^2+4x(6-4x)+(6-4x)^2-12=0$

$\Leftrightarrow 16x^2-24x+24=0$, vô nghiệm.

• $y = 4 - 4x$: Phương trình $(1) \Leftrightarrow 16x^2 + 4x(4-4x) + (4-4x)^2 - 12 = 0$

$\Leftrightarrow 16x^2 - 16x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Bài toán 107. $\begin{cases} x^4 - x^3y + x^2y^2 = 1 \\ x^3y - x^2 + xy = -1 \end{cases}$

Giải : Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y(x-y) = x^4 - 1 & (1) \\ xy(x^2+1) = x^2 - 1 & (2) \end{cases}$ (I)

Ta thấy nếu x = 0 thì không thỏa hệphương trình. Vậy $x \neq 0$

TH 1: y = 0 : Hệ phương trình (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 1 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm 1$

TH 2: x = 1: Hệ phương trình (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} y(1-y) = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0$

Vậy (1; 0) là một nghiệm của hệ phương trình.

TH 3: x = -1: Hệ phương trình (I) $\Leftrightarrow \begin{cases} y(-1-y) = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0$

Vậy (-1; 0) là một nghiệm của hệ phương trình.

TH 4: $\begin{cases} x \neq \pm 1 \\ y \neq 0 \end{cases}$: Lấy phương trình (1) chia cho phương trình (2), vế theo vế, ta được :

(2) $x\left(\frac{x-y}{x^2+1}\right) = x^2 + 1 \Rightarrow xy = -\left(x^4 + x^2 + 1\right)$ (3)

Thế (3) vào phương trình 2) ta được :

$x^2 - 1 = -\left(x^4 + x^2 + 1\right)\left(x^2 + 1\right) \Leftrightarrow x^2 - 1 = -\left(x^6 + 2x^4 + 2x^2 + 1\right)$

$\Leftrightarrow x^6 + 2x^4 + 3x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow x^2\left(x^4 + 2x^2 + 3\right) = 0$, vô nghiệm.

Hệ phương trình đã cho có nghiệm : $(-1;0),(1;0)$.

Bài toán 111. $\begin{cases} 8x^3y^3 + 27 = \dfrac{7}{2}y^3 \\ 4x^2y + 6x = y^2 \end{cases}$

Giải : Dễ thấy y = 0 không thỏa hệphương trình. Vậy $y \neq 0$.

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^3 + \dfrac{27}{y^3} = \dfrac{7}{2} \\ 4\dfrac{x^2}{y} + 6\dfrac{x}{y^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x)^3 + \left(\dfrac{3}{y}\right)^3 = \dfrac{7}{2} \\ 2\dfrac{x}{y}\left(2x + \dfrac{3}{y}\right) = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(2x+\dfrac{3}{y}\right)\left(4x^2+\dfrac{9}{y^2}-\dfrac{6x}{y}\right) = \dfrac{7}{2} & (1) \\ 2\dfrac{x}{y}\left(2x + \dfrac{3}{y}\right) = 1 & (2) \end{cases}$$

Từ phương trình (2) $\Rightarrow x \neq 0$. Phương trình (2) $\Leftrightarrow 2x+\dfrac{3}{y} = \dfrac{y}{2x} \quad (3)$

Thế (3) vào phương trình (1) ta được :

$$\frac{y}{2x}\left(4x^2+\frac{9}{y^2}-\frac{6x}{y}\right) = \frac{7}{2} \quad \Leftrightarrow \frac{y}{2x}\left(4x^2+\frac{9}{y^2}-\frac{6x}{y}\right) = \frac{7}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{y}{2x} = \frac{\frac{7}{2}}{4x^2+\frac{9}{y^2}-\frac{6x}{y}} \quad \Leftrightarrow 7x = y\left(4x^2+\frac{9}{y^2}-\frac{6x}{y}\right)$$

$$\Leftrightarrow 7x = 4x^2y+\frac{9}{y}-6x \quad \Leftrightarrow 4(xy)^2 - 13xy + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} xy=1 \\ xy=\dfrac{9}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{x} \\ xy=\dfrac{9}{4x} \end{array}\right.$$

• $y=\dfrac{1}{x}$:Phương trình (3) $\Leftrightarrow 5x=\dfrac{9}{2x^2} \Leftrightarrow 10x^3=9 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{9}{10}} \Rightarrow y=\sqrt[3]{\dfrac{10}{9}}$

• $y=\dfrac{9}{4x}$:(3) $\Leftrightarrow \dfrac{10}{3}x=\dfrac{9}{8x^2} \Leftrightarrow x^3=\dfrac{27}{80} \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{\sqrt[3]{80}} \Rightarrow y=\dfrac{3\sqrt[3]{80}}{4}$

Hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm : $\left(\sqrt[3]{\dfrac{9}{10}};\sqrt[3]{\dfrac{10}{9}}\right),\left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{80}};\dfrac{3\sqrt[3]{80}}{4}\right)$.

Bài toán 114. $\begin{cases} 2x^3 - 9y^3 = (x-y)(2xy+3) & (1) \\ x^2 + y^2 - xy = 3 & (2) \end{cases}$

Giải : Thế phương trình (2) vàophương trình (1) ta được :

$$2x^3 - 9y^3 = (x-y)(x^2 + y^2 + xy)$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 9y^3 = x^3 - y^3 \Leftrightarrow x^3 = 8y^3 \Leftrightarrow x = 2y$$

Thế : **x = 2y** vàophương trình (2) ta được :

$$3y^2=3 \Leftrightarrow y=\pm 1 \Rightarrow x=\pm 2$$

Hệphương trình đã cho có 2 nghiệm : $(2;1),(-2;-1)$.

Bài toán 151.

$$\begin{cases} (x-3)(x+4)=y(y-7) & (1) \\ \dfrac{y^2}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{2-y}} & (2) \end{cases}$$

Giải: Điều kiện : $\begin{cases} x-1>0 \\ 2-y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ y<2 \end{cases}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow y^2-7y-x^2-x+12=0$ (3)

Xem phương trình (3) là phương trình theo ẩn y, còn x là tham số.

$\Delta = 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$. Nghiệm là : $\left[\begin{array}{l} y = x+4 \\ y = 3-x \end{array}\right.$

- $y = x + 4$, thế vào phương trình 2) ta được : $\frac{(x+4)^2}{\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{-x-2}}$. ,loại

- $y = 3 - x$, thế vào phương trình (2) ta được :

$\frac{(3-x)^2}{\sqrt{x-1}} = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow 9-6x+x^2 = x - 1 \quad \Leftrightarrow 10-7x+x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \Rightarrow y = -2 \\ x = 2 \Rightarrow y = 1 \end{array}\right.$

Hệ phương trình có 2 nghiệm : $(5;-2);(2;1)$

Bài toán 181. $\begin{cases} x^2 - y(x+y)+1 = 0 & (1) \\ (x^2+1)(x+y-2)+y = 0 & (2) \end{cases}$

Giải : Ta có : $\begin{cases} x^2 - y(x+y)+1 = 0 \\ (x^2+1)(x+y-2)+y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 = y(x+y) \\ (x^2+1)(x+y-2)+y = 0 \end{cases}$

- y = 0 không thỏa hệ

- Xét $y \neq 0$. Chia 2 vế của phương trình (2) cho y, ta được :

$$\begin{cases} x^2+1 = y(x+y) \\ (x+y)^2 - 2(x+y)+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 = y(x+y) \\ (x+y-1)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 = y(x+y) \\ x+y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 = y \\ x+y = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+1 = 1-x \\ y = 1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x = 0 \\ y = 1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = -1 \\ y = 1-x \end{cases}$$

Hệ phương trình có 2 nghiệm : $(0;1);(-1;2)$

Bài toán 182. $\begin{cases}\sqrt{x^2+2y+3}+2y-3=0\\ 2\left(2y^3+x^3\right)+3y\left(x+1\right)^2+6x\left(x+1\right)+2=0\end{cases}$

Giải : Điều kiện : $x^2+2y+3\geq 0$

Hệ phương trình $\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x^2+2y+3}+2y-3=3-2y & (1)\\ 2\left(2y^3+x^3\right)+3y\left(x+1\right)^2+6x\left(x+1\right)+2=0 & (2)\end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có : $3-2y\geq 0\Leftrightarrow y\leq\frac{3}{2}$

- y = 0 không thỏa hệ
- Xét $y\neq 0$. Chia 2 vế của phương trình (2) cho y^3 , ta được :

$$\Leftrightarrow 2\frac{x^3}{y^3}+4+3\frac{x^2}{y^2}+6\frac{x}{y^2}+\frac{3}{y^2}+6\frac{x^2}{y^3}+6\frac{x}{y^3}+\frac{2}{y^3}=0$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{x^3}{y^3}+6\frac{x^2}{y^3}+6\frac{x}{y^3}+\frac{2}{y^3}+3\frac{x^2}{y^2}+6\frac{x}{y^2}+\frac{3}{y^2}+4=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x^3}{y^3}+3\frac{x^2}{y^3}+3\frac{x}{y^3}+\frac{1}{y^3}\right)+3\left(\frac{x^2}{y^2}+2\frac{x}{y^2}+\frac{1}{y^2}\right)+4=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{x+1}{y}\right)^3+3\left(\frac{x+1}{y}\right)^2+4=0 \qquad \Leftrightarrow\frac{x+1}{y}=-2\Leftrightarrow x=-2y-1$$

Thế vào phương trình (1), ta được : $\sqrt{4y^2+6y+4}=3-2y$

$\Leftrightarrow 4y^2+6y+4=\left(3-2y\right)^2 \quad \Leftrightarrow 18y-5=0\Leftrightarrow y=\frac{5}{18}\Rightarrow x=-\frac{14}{9}$, thỏa điều kiện ban đầu.

Hệ phương trình có nghiệm : $\left(-\frac{14}{9};\frac{5}{18}\right)$

Bài toán 188. $\begin{cases}x^2+xy+y^2=7 & (1)\\ x^2-xy-2y^2=-x+2y & (2)\end{cases}$

Giải : Phương trình (2) $\Leftrightarrow x^2+(1-y)x-2y^2-2y=0$

Xem đây là phương trình theo ẩn x, còn y là tham số.

$\Delta=(3y+1)^2$. Nghiệm là : $\left[\begin{array}{l} x=2y \\ x=-y-1 \end{array}\right.$

• $x=2y$,thay $x=2y$ vào phương trình (1) ta được :

$7y^2=7 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1 \Rightarrow x=2 \\ y=-1 \Rightarrow x=-2 \end{array}\right.$

• $x=-y-1$, thay vào phương trình (1) ta được :

$(-y-1)^2+(-y-1)y+y^2=7 \quad \Leftrightarrow y^2+y-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-3 \Rightarrow x=2 \\ y=2 \Rightarrow x=-3 \end{array}\right.$

Vậy hệ phương trình có 4 nghiệm : $(2;1);(-2;-1);(2;-3);(-3;2)$

Bài toán 197. $\begin{cases} \sqrt{2x^2+xy+x+1}+\sqrt{y^2+x+3y}=x+y+2 & (1) \\ 4x^2+y^2-4xy-6x+3y+2=0 & (2) \end{cases}$

Giải : Điều kiện : $\begin{cases} 2x^2+xy+x+1 \geq 0 \\ x+3y+y^2 \geq 0 \end{cases}$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow y^2+(3-4x)y+4x^2-6x+2=0$ (3)

Xemphương trình (3) là phương trình theo ẩn y, còn x là tham số.

$\Delta=1$. Nghiệm là : $\left[\begin{array}{l} y=\dfrac{4x-3+1}{2}=2x-2 \\ y=\dfrac{4x-3-1}{2}=2x-1 \end{array}\right.$

• $y=2x-2$,t hế y = 2x -2 vào phương trình (1) ta có phương trình :

$\sqrt{4x^2-x+1}+\sqrt{4x^2-x-2}=3x$ (4) $\qquad \Leftrightarrow \dfrac{3}{\sqrt{4x^2-x+1}-\sqrt{4x^2-x-2}}=3x$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{4x^2-x+1}-\sqrt{4x^2-x-2}}-x=0 \qquad \Leftrightarrow \sqrt{4x^2-x+1}-\sqrt{4x^2-x-2}=\dfrac{1}{x}$ (5)

Do $4x^2-x+1>4x^2-x-2, \forall x\in\mathbb{R}$ nên từ phương trình trên ta có : x > 0.

Cộng phương trình(4) và phương trình(5), vế theo vế, ta được :

$2\sqrt{4x^2-x+1}=3x+\dfrac{1}{x} \qquad \Leftrightarrow 4\left(4x^2-x+1\right)=\left(3x+\dfrac{1}{x}\right)^2$

$\Leftrightarrow 7x^4-4x^3-2x^2-1=0 \quad \Leftrightarrow (x-1)\left(7x^3+3x^2+x+1\right)=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=0$, thỏa phương trình

• $y=2x-1$,thế **y = 2x -1** vào phương trình (1) ta có phương trình :

$\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{4x^2+3x-2}=3x+1$ (6)

Điều kiện : $\begin{cases} 4x^2+3x-2\ge 0 \\ 3x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge \dfrac{-3+\sqrt{41}}{8}>0$

Vì $x=1$ không thỏa phương trình nên $x\ne 1$. $\quad (6)\Leftrightarrow \dfrac{-3x+3}{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2+3x-2}}=3x+1$

$\Leftrightarrow \sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2+3x-2}=\dfrac{-3x+3}{3x+1} \qquad \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+1}-\sqrt{4x^2+3x-2}=-1+\dfrac{4}{3x+1}$ (7)

Cộng phương trình(6) và phương trình(7), vế theo vế, ta được :

$2\sqrt{4x^2+1}=3x+\dfrac{4}{3x+1} \qquad \Leftrightarrow 4\left(4x^2+1\right)=\left(3x+\dfrac{4}{3x+1}\right)^2$

$\Leftrightarrow 16x^2+4=9x^2+\dfrac{16}{(3x+1)^2}+\dfrac{24x}{3x+1} \qquad \Leftrightarrow \left(7x^2+4\right)(3x+1)^2=16+24x(3x+1)$

$\Leftrightarrow 63x^4+42x^3-29x^2-12=0 \qquad \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{2}{3}\right)\left(63x^3+84x^2+27x+18\right)=0$

$\Leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}\Rightarrow y=\dfrac{1}{3}$, thỏa phương trình. Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(1;0);\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3}\right)$